

УДК 681.5.01

DOI: 10.18413/2518-1092-2016-1-3-31-36

Дылевский А.В.

**РАСЧЁТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ  
СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ**

профессор кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования, доктор технических наук, доцент  
Воронежский государственный университет, Университетская площадь, д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия  
*e-mail*: nefta@yandex.com

**Аннотация**

Рассматривается задача построения переходных процессов в системах управления с распределенными параметрами по передаточной функции системы. Передаточная функция может быть трансцендентной. В статье предполагается устойчивость исследуемой системы управления, т. е. передаточная функция системы должна быть аналитической на мнимой оси и в правой полуплоскости комплексной плоскости переменного. Однако предлагаемый метод может быть обобщен на случай неустойчивой системы управления. Для решения поставленной задачи применяются частотные характеристики, получаемые по передаточной функции. Приводятся расчетные формулы для построения импульсной характеристики, а также метод построения переходных процессов при произвольном входном воздействии. Построение переходных процессов осуществляется по формуле свертки и требует определения импульсной характеристики. В основе расчетных формул лежит метод Гаусса численного интегрирования. В статье приводятся примеры расчета переходных характеристик и построены соответствующие графики.

**Ключевые слова:** распределенные системы управления; передаточная функция; частотная характеристика; переходный процесс.

UDC 681.5.01

Dylevskiy A.V.

**CALCULATION OF TRANSIENT PROCESSES IN DISTRIBUTED  
CONTROL SYSTEMS**

Doctor of Engineering, Associate Professor, Department of Computer Monitoring and Logistics,  
Voronezh State University, 1 Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russia  
*e-mail*: nefta@yandex.com

**Abstract**

The article covers the problem of calculation of transition processes in distributed control systems for the transfer function of system. The transfer function can be transcendental. The article assumes stability of the control system under study, i.e. the transfer function of the system must be analytic on the imaginary axis and in the right half of the complex plane of the variable. However, the proposed method can be generalized to the case of an unstable control system. To solve the problem, the author applies the frequency characteristics obtained by the transfer function. The article provides the formulas for calculation of the pulse characteristic and also a method of calculation of transition processes in case of any arbitrary input signal. The calculation of transition processes is carried out with the convolution formula and requires determination of the pulse characteristic. The calculation formulas are based on the method of Gauss of numerical integration. The article gives examples of calculation of transient response and corresponding graphics.

**Keywords:** distributed control systems; transfer function; frequency characteristic; transient processes.

### Введение

При анализе систем автоматического управления с распределенными параметрами одной из важнейших задач является анализ переходных процессов [6, 9, 10]. В системах управления с распределенными параметрами эта задача с математической точки зрения сводится к поиску общего решения некоторого интегро-дифференциального уравнения при заданных начальных и граничных условиях, а также при заданных воздействиях [6, 7]. В большинстве случаев для распределенных систем управления не всегда возможно получить решение в явном виде или установить явную зависимость между параметрами системы и видом решения. Поэтому в теории автоматического управления широко используются приближенные методы анализа переходных процессов [4]. В частности, применение частотных методов позволяет без нахождения собственных значений и собственных функций дифференциальных уравнений осуществлять анализ переходных процессов сосредоточенных систем высокого порядка и систем с распределенными параметрами. Частотный метод анализа переходных процессов основан на использовании частотных характеристик, которые могут быть определены по передаточной функции системы или из эксперимента. При этом передаточная функция системы может быть не только дробно-рациональной, но и трансцендентной функцией [2]. Поэтому данный метод является универсальным и позволяет решать задачу построения переходных процессов систем управления, содержащих как сосредоточенные, так и распределенные параметры.

#### 1. Частотный метод расчета переходных характеристик

Пусть  $\Phi(p)$ ,  $p \in \mathbb{C}$ , – некоторая передаточная функция исследуемой системы управления. Будем предполагать, что  $\Phi(p)$  – аналитическая функция в правой полуплоскости и на мнимой оси комплексной плоскости  $p \in \mathbb{C}$ . Пусть, кроме того,  $g(t)$  – произвольное задающее воздействие системы, для которого существует изображение по Лапласу. Тогда изображение по Лапласу для переходного процесса определяется формулой

$$X(p) = \Phi(p)G(p). \quad (1)$$

Как известно [3], формула (1) в пространстве оригиналов представляет собой свертку

$$x(t) = \int_0^t \varphi(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi(t)$  – импульсная характеристика системы с передаточной функцией  $\Phi(p)$ , т.е. реакция системы с передаточной функцией  $\Phi(p)$  на входной сигнал в виде дельта-функции Дирака при нулевых начальных условиях.

Таким образом, задача построения переходных процессов в системе управления при произвольном входном воздействии сводится к интегрированию некоторого выражения, содержащего импульсную характеристику рассматриваемой системы.

Выражение для переходного процесса  $x(t)$  имеет вид [3]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X(p)e^{pt} dp, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad (4)$$

$\alpha$  – абсцисса абсолютной сходимости функции  $X(p)$ ; в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \alpha$  изображение  $X(p)$  – аналитическая функция. Из формулы (3) после элементарных преобразований получаем следующее выражение для переходного процесса [5]:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha + j\omega)e^{(\alpha + j\omega)t} d\omega, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Если  $\alpha = 0$ , то формула (5) приобретает вид

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Так как  $x(t) = 0$  при  $t < 0$ , то из (6) получаем

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega. \quad (7)$$

Пусть  $X(j\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega)$ , где  $X_R(\omega)$  и  $X_I(\omega)$  – соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики. При этом,  $X_R(\omega)$  – четная, а  $X_I(\omega)$  – нечетная функции аргумента  $\omega$ . Тогда, складывая формулы (6) и (7), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X_R(\omega) \cos \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Вычитая из выражения (6) выражение (7), имеем

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})d\omega =$$

$$= \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \sin \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X_1(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (9)$$

## 2. Построение импульсной характеристики и переходного процесса

Для нахождения импульсной характеристики положим  $g(t) = \delta(t)$ , где  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака. Так как изображение по Лапласу для дельта-функции Дирака определяется формулой

$$\delta(t) \div 1, \quad (10)$$

то формула (1) принимает вид

$$X(p) = \Phi(p). \quad (11)$$

Так как  $\Phi(p)$  – передаточная функция устойчивой системы управления, то  $X(p)$  является аналитической функцией в правой полуплоскости комплексной плоскости и на мнимой оси и поэтому можно положить  $\alpha = 0$ .

Тогда импульсная характеристика  $\varphi(t)$  может быть найдена по формулам (8) или (9), т. е.

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} I(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (12)$$

где  $R(\omega)$  и  $I(\omega)$  – соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики  $\Phi(j\omega)$ .

Для построения переходного процесса при произвольном входном воздействии воспользуемся формулой свертки (2). Так как импульсная характеристика может быть вычислена по формулам (12) и входное воздействие  $g(t)$  известно, то применяя описанные выше формулы для численного интегрирования несобственных интегралов, можно найти реакцию распределенной системы управления на произвольное входное воздействие  $g(t)$ .

Следует отметить, что при исследовании систем управления наряду с импульсной характеристикой рассчитываю переходную характеристику  $h(t)$ , т. е. реакцию системы на входной сигнал в виде функции Хевисайда (функции единичного скачка) при нулевых начальных условиях. Согласно определению переходной характеристики положим  $g(t) = 1(t)$ , где  $1(t)$  – функция Хевисайда. Тогда переходная характеристика системы  $h(t)$  в силу формулы (2) и определения функции Хевисайда имеет вид

$$h(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Для непосредственного вычисления импульсной характеристики в соответствии с формулами (12) следует использовать методы численного интегрирования несобственных интегралов. В частности, можно использовать следующий подход [1]. Для вычисления интеграла вида

$$J = \int_a^{\infty} f(z) dz \quad (14)$$

представим  $J$  как сумму определено интеграла  $J_1$  по конечному промежутку  $[a, b]$  и несобственного интеграла  $J_2$  по промежутку  $[b, \infty)$ , т. е.

$$J = \int_a^{\infty} f(z) dz = \int_a^b f(z) dz + \int_b^{\infty} f(z) dz = J_1 + J_2. \quad (15)$$

Здесь  $b > a$  – некоторое число, которое следует выбирать из условия

$$|J_2| < \varepsilon \quad (16)$$

для произвольного наперед заданного числа  $\varepsilon$ . При этом можно использовать прием, который заключается в автоматическом изменении  $b$ , например, как  $b_0, 2b_0, 4b_0, 8b_0$  и т. д., где  $b_0$  – начальное значение  $b$ , с контролем на каждой  $i$ -й стадии условия

$$|J_{2,i} - J_{2,i-1}| < \varepsilon. \quad (17)$$

Интеграл  $J_1$  можно вычислять с помощью метода Гаусса. Метод Гаусса основан на интерполяции  $f(z)$  полиномом Лагранжа, но абсциссы  $z_i$  выбираются из условия обеспечения минимума погрешности интерполяции. При этом интеграл  $J_1$  подстановкой

$$z = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} y \quad (18)$$

сводится к виду

$$J_1 = \int_{-1}^{+1} f(y) dy = \sum_{i=1}^n A_i f(y_i). \quad (19)$$

Метод Гаусса обеспечивает повышенную точность – формула верна для полиномов до  $(2n-1)$ -й степени. Для  $n=3$  имеем

$$A_1 = 5/9, \quad t_1 = -\sqrt{1/3},$$

$$A_2 = 8/9, \quad t_2 = 0,$$

$$A_3 = 5/9, \quad t_3 = \sqrt{1/3} \quad (20)$$

Остаточный член (погрешность) при этом равен

$$\Delta_3 = \frac{1}{15750} \left( \frac{b-a}{2} \right)^7 f^{(4)}(\xi). \quad (21)$$

Для повышения точности интегрирования отрезок  $[a, b]$  дробится на  $m$  частей.

### 3. Примеры

С помощью описанной выше методики построим переходную характеристику для системы управления с передаточной функцией

$$\Phi(p) = \frac{1}{p+1}. \quad (22)$$

Нетрудно проверить, что переходная характеристика для данной системы имеет вид

$$h(t) = 1 - e^{-t}. \quad (23)$$

На рис. 1 представлены точная и расчетная переходные характеристики для системы управления с передаточной функцией (22). Очевидно, что кривые совпали.

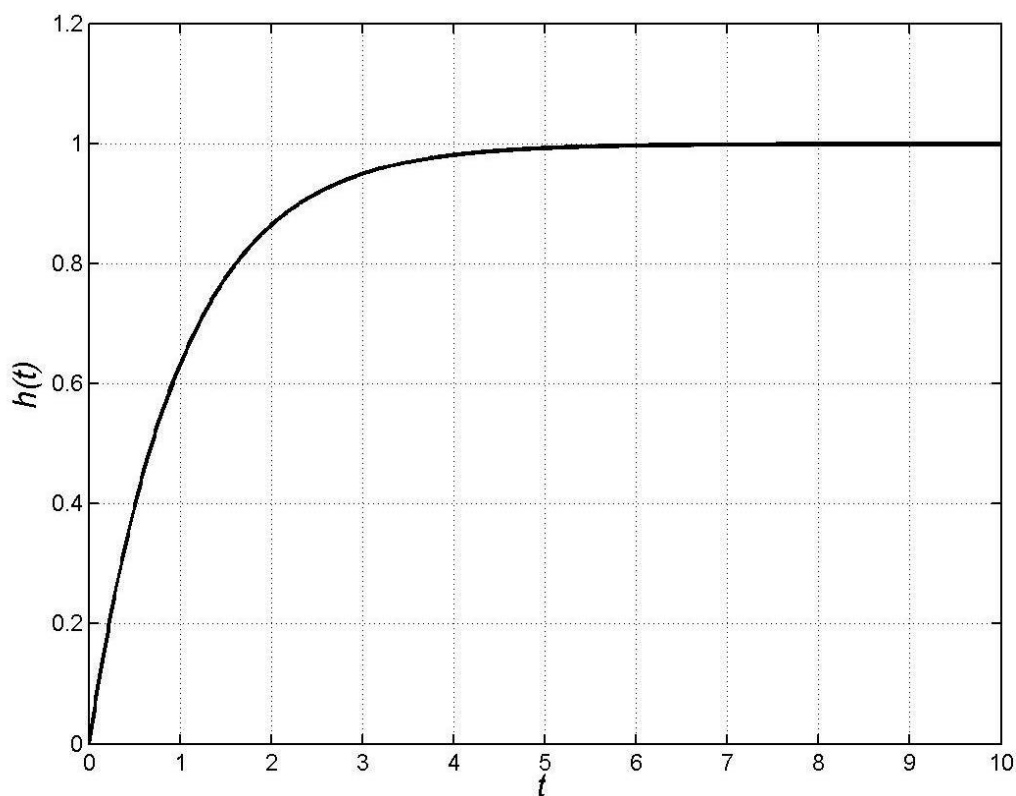


Рис. 1. Переходные характеристики  
Fig. 1. Transient responses

На рис. 2 представлена переходная характеристика для распределенной системы управления со следующей передаточной функцией [8]:

$$\Phi(p) = \frac{(p+1)sh^2 1 + ch p sh^2 2}{(p+1)sh^2(p+1)}. \quad (24)$$

Все расчеты и графические построения были проведены в пакете Matlab.

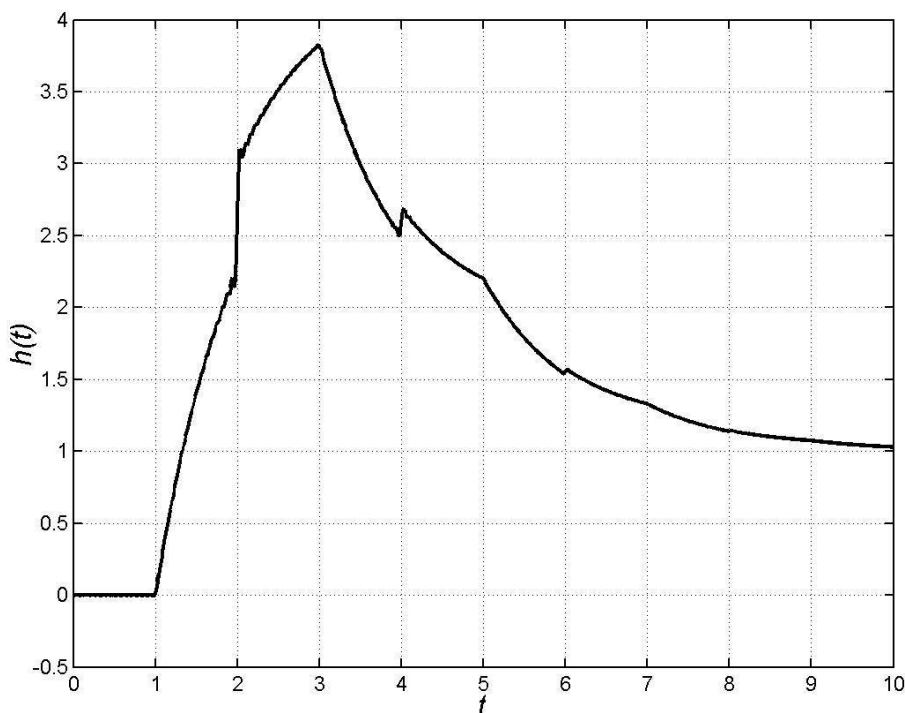


Рис. 2. Переходная характеристика  
Fig. 2. Transient response

Работа выполнена в соответствии с Госзаданием № 1.759.2016/ДААД “Проведение научно-исследовательских работ в рамках международного научно-образовательного сотрудничества по программе «Михаил Ломоносов» по теме: «Моделирование и регулирование линейных систем с распределёнными параметрами»”.

#### Список литературы

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.
2. Дылевский А.В., Лозгачев Г.И., Малютина В.С. Синтез конечномерных регуляторов для бесконечномерных объектов. Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. 298 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
4. Солодовников В.В. О частотных условиях монотонности и об оценке погрешности в определении переходного процесса по частотным характеристикам // Автоматика и телемеханика. 1950. Том 11. Выпуск 1. С. 11-38.
5. Техническая кибернетика: Серия инженерных монографий. Теория автоматического регулирования. Книга 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического

регулирования / Под редакцией В.В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1967. 770 с.

6. Curtain R., Zwart H. An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. New York: Springer-Verlag, 1995. 697 p.
7. Dugard L., Verriest E.I. Stability and control of time-delay systems. Lecture notes in control and information sciences. London: Springer-Verlag, 1998. 317p.
8. Dylevskii A.V. Constructing modal control systems for plants with meromorphic transfer function // Journal of Computer and Systems Sciences International. Volume 47, No. 3 (2008): P. 346–351.
9. Gu G., Khargonekar P.P., Lee B.E. Approximation on infinite-dimensional systems // IEEE Transactions on Automatic Control. Volume 34, No. 6 (1989): P. 610–618.
10. Malek-Zavarei M., Jamshidi M. Time delay systems: analysis, optimization and applications. Amsterdam: North-Holland, 1987. 504 p.

#### References

1. Demidovich B.P., Maron I.A. Fundamentals of Calculus Mathematics. M.: Nauka, 1966. 664 p.
2. Dylevskiy A.V., Lozgachev G.I., Malyutina V.S. Synthesis of Finite-dimensional Controllers for Infinite-dimensional Plants. Voronezh: Izdatelsko-poligraficheskij centr Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta, 2012. 298 p.



3. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. Methods of the Theory of Functions of the Complex Variable. M.: Nauka, 1987. 688 p.

4. Solodovnikov V.V. About Frequency Conditions of Monotony and an Estimate of the Error in the Determination of the Transition Process according to Frequency Characteristics // *Avtomatika i Telemekhanika*. Volume 11, Issue 1 (1950): Pp. 11-38.

5. Technical Cybernetics: A Series of Engineering Monographs. The Theory of Automatic Control. Book 1. The Mathematical description, Analysis of Stability and Quality of Automatic Control Systems / Ed. by V.V. Solodovnikov. M.: Mashinostroenie, 1967. 770 p.

6. Curtain R., Zwart H. An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. New York: Springer-Verlag, 1995. 697 p.

7. Dugard L., Verriest E.I. Stability and control of time-delay systems. Lecture notes in control and information sciences. London: Springer-Verlag, 1998. 317 p.

8. Dylevskii A.V. Constructing modal control systems for plants with meromorphic transfer function // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. Volume 47, No. 3 (2008): Pp. 346-351.

9. Gu G., Khargonekar P.P., Lee B.E. Approximation on infinite-dimensional systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. Volume 34, No. 6 (1989): Pp. 610-618.

10. Malek-Zavarei M., Jamshidi M. Time delay systems: analysis, optimization and applications. Amsterdam: North-Holland, 1987. 504 p.